E^n中的垂心组定理

李兴源，lihpb@qq.com

摘　要

本文将三角形的垂心组定理推广至存在垂心的n维单形。

关键词

n维单形，k号心，垂心

The Orthocentric System Theorem in N-Euclidean Space

Xingyuan Li，lihpb@qq.com

Abstract

This article extends the triangularly orthocentric system theorem to the n-simplex with orthocenter.

Keywords

N-Simplex, No.K Center, Orthocenter

1. 引言

定义 1 在n维欧氏空间中，设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，k为任意非零实数，若点K满足

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}\,,$$

则将点K称作n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的k号心。

在文[1]中，对n维单形k号心的定义是k取任意正整数。事实上，k可以为任意非零实数。

定义 2 若n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的$n+1$条高线在n维欧氏空间中交于一点H，则将点H称作n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心。本文将存在垂心的n维单形称作n维垂心单形。

本文所讨论的n维单形均默认其为非退化单形且存在垂心（因为对于退化单形，其外心O在无穷远点，也不可能存在垂心）。

引理 1 当$n\geq 3$时，n维单形存在垂心的充分必要条件是该单形中任意两条没有公共端点的棱均互相垂直。[2][3]

证明 设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的任意两顶点A_i、A_j所对的$n-1$维侧面分别为S_i、S_j，S_i与S_j所交的$n-2$维单形为F_{ij}，$0\leq i<j\leq n$。

先证必要性，设n维垂心单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，由定义 2 知

$$\begin{cases} A_iH \perp S_i \\ A_jH \perp S_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_iH \perp F_{ij} \\ A_jH \perp F_{ij} \end{cases} \Rightarrow A_iA_j \perp F_{ij},$$

因为$A_kA_l(0 \le k < l \le n, k \ne i, l \ne j)$为$n-2$维单形$F_{ij}$的棱，故

$$A_iA_j \perp A_kA_l,$$

必要性得证。

再证充分性，若n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$满足

$$A_iA_j \perp A_kA_l(0 \le k < l \le n, k \ne i, l \ne j),$$

即

$$A_iA_j \perp F_{ij},$$

作A_iH_{ij}垂直于F_{ij}所在的$n-2$维超平面于H_{ij}，则F_{ij}垂直于三角形$A_iA_jH_{ij}$所在的二维平面。

再作A_iH_i垂直于直线A_jH_{ij}于H_i，A_jH_j垂直于直线A_iH_{ij}于H_j，则直线A_iH_i与A_jH_j在三角形$A_iA_jH_{ij}$所在的二维平面中必存在交点，设交点为H，因此

$$A_iH \perp S_i,\quad A_jH \perp S_j,$$

故H为n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心。充分性得证。

引理 2 当$n \ge 3$时，n维垂心单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，各顶点$A_i(i = 0,1,2,\ldots,n)$所对的$n-1$维侧面为S_i，S_i的垂心为H_i，则A_i、H、H_i三点共线。

证明 设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的任意两顶点A_i、A_j所对的$n-1$维侧面分别为S_i、S_j，S_i与S_j所交的$n-2$维单形为F_{ij}，$0 \le i < j \le n$。作直线A_0H与S_0所在的$n-1$维超平面交于点H_0，为不失一般性，以下只证H_0即为$n-1$维侧面S_0的垂心。

由定义 2 知

$$A_0H_0 \perp S_0,$$

即

$$A_0H_0 \perp F_{0i}(i = 1,2,\ldots,n)。$$

又由引理 1 有

$$A_0A_i \perp F_{0i},$$

则在S_0所在的$n-1$维欧氏子空间中，有

$$A_iH_0 \perp F_{0i},$$

再由定义 2 知H_0即为$n-1$维侧面S_0的垂心，故命题成立。

2. 预备知识

引理 3 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，垂心为H，则：

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}。$$

证明 以下先证A_0H垂直于$A_jA_k(1 \le j < k \le n)$

$$\overrightarrow{A_0H}\cdot\overrightarrow{A_jA_k}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA_0})(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}-(n-1)\overrightarrow{OA_0}\right](\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OA_k}+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n}\overrightarrow{OA_i}-(n-1)\overrightarrow{OA_0}\right](\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})$$

$$=\frac{1}{n-1}(\left|\overrightarrow{OA_k}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA_j}\right|^2)+\frac{1}{n-1}\left[\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n}\overrightarrow{OA_i}-(n-1)\overrightarrow{OA_0}\right](\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j,k}}^{n}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_0})(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j,k}}^{n}\overrightarrow{A_0A_i}\cdot\overrightarrow{A_jA_k}=0\text{。}$$

设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的顶点A_i所对的$n-1$维侧面为$S_i(i=0,1,2,\ldots,n)$，则A_0H垂直于S_0所在的$n-1$维超平面，同理可证A_iH垂直于S_i所在的$n-1$维超平面，H即为n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心。

当$n=3$时，即为文[4]所讨论的关于垂心四面体的情形。

由此可知，n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心H与重心G分别为该单形的$n-1$号心与$n+1$号心，且外心O、重心G、垂心H三点共线。

引理 4 若n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，则A_0为n维单形$HA_1A_2\ldots A_n$的垂心。

证明 设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的各顶点$A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$所对的$n-1$维侧面为S_i，由定义 2 知

$$A_iH\perp S_i\text{。}$$

因为$A_iA_j(i,j=1,\ldots,n;i\neq j)$为$n-1$维单形$S_0$的棱，$A_0A_j$为$n-1$维单形$S_i$的棱，则

$$A_0H\perp A_iA_j\text{，}\quad A_iH\perp A_0A_j\text{；}$$

故A_0H垂直于$n-1$维单形$A_1A_2\ldots A_n$，A_0A_j垂直于$n-1$维单形$HA_1\ldots A_{j-1}A_{j+1}\ldots A_n$，再由定义 2 知$A_0$即为$n$维单形$HA_1A_2\ldots A_n$的垂心。命题得证。

3. 主要结论

由引理 4 并根据对称性即有

定理 1 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，则点集$\{H,A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n\}$构成垂心组，垂心组中的任一点均为其余$n+1$点所围的$n$维单形之垂心。

定理 2 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，重心为G，G_0、G_1、…、G_n分别为n维单形$HA_1A_2\ldots A_n$、$A_0HA_2\ldots A_n$、$A_0A_1\ldots A_{n-1}H$的重心，则点集$\{G,G_0,G_1,\ldots,G_n\}$构成垂心组。

证明 设O为坐标原点，$0\le i<j\le n$，则有

$$\overrightarrow{G_iG_j}=\overrightarrow{OG_j}-\overrightarrow{OG_i}=\frac{\overrightarrow{OH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j}}{n+1}-\frac{\overrightarrow{OH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_i}}{n+1}=\frac{\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}}{n+1}=\frac{\overrightarrow{A_jA_i}}{n+1}\text{，}$$

故n维单形$G_0G_1G_2\ldots G_n$与n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$相似，相似比为$1:n+1$。

又

$$\overrightarrow{G_iG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OG_i}=\frac{\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{OA_j}}{n+1}-\frac{\overrightarrow{OH}+\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{OA_j}-\overrightarrow{OA_i}}{n+1}=\frac{\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OH}}{n+1}=\frac{\overrightarrow{HA_i}}{n+1}，\ 0\le i\le n，$$

即 G 为 n 维单形 $G_0G_1G_2...G_n$ 的垂心。命题得证。

定理 3 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的垂心为 H，外心为 O，O_0、O_1、...、O_n 分别为 n 维单形 $HA_1A_2...A_n$、$A_0HA_2...A_n$、$A_0A_1...A_{n-1}H$ 的外心，则点集 $\{O,O_0,O_1,...,O_n\}$ 构成垂心组。

证明 由定理 1 知 $A_i(i=0,1,2,...,n)$ 为 n 维单形 $HA_0...A_{i-1}A_{i+1}...A_n$ 的垂心，根据引理 3 有

$$\overrightarrow{O_iA_i}=\frac{\overrightarrow{O_iH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k}-\overrightarrow{O_iA_i}}{n-1}\Rightarrow n\overrightarrow{O_iA_i}=\overrightarrow{O_iH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k}。$$

因此

$$\overrightarrow{O_iO}=\overrightarrow{O_iA_i}+\overrightarrow{A_iH}+\overrightarrow{HO}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{O_iH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k})+\overrightarrow{A_iH}+\overrightarrow{HO}，$$

对上式左右两边乘以 n 可得

$$n\overrightarrow{O_iO}=\overrightarrow{O_iO}+\overrightarrow{OH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k}+n\overrightarrow{A_iH}+n\overrightarrow{HO}，$$

移项并整理可得

$$(n-1)\overrightarrow{O_iO}=\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k}+(n-1)\overrightarrow{HO}+n\overrightarrow{A_iH}=\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k}-\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{OA_k}+n\overrightarrow{A_iH}=(n+1)\overrightarrow{O_iO}+n\overrightarrow{A_iH}，$$

即

$$\overrightarrow{O_iO}=\frac{n}{2}\overrightarrow{HA_i}。(1)$$

当 $0\le i<j\le n$ 时，

$$\overrightarrow{O_iO_j}=\overrightarrow{O_iA_i}+\overrightarrow{A_iA_j}+\overrightarrow{A_jO_j}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{O_iH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k})-\frac{1}{n}(\overrightarrow{O_jH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_jA_k})+\overrightarrow{A_iA_j}=\frac{n+2}{n}\overrightarrow{O_iO_j}+\overrightarrow{A_iA_j}，$$

即

$$\overrightarrow{O_iO_j}=\frac{n}{2}\overrightarrow{A_jA_i}。(2)$$

故 n 维单形 $O_0O_1O_2...O_n$ 与 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 相似，且 O 为 n 维单形 $O_0O_1O_2...O_n$ 的垂心。命题得证。

定理 4 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的垂心为 H，k 号心为 K，K_0、K_1、...、K_n 分别为 n 维单形 $HA_1A_2...A_n$、$A_0HA_2...A_n$、$A_0A_1...A_{n-1}H$ 的 k 号心，则点集 $\{K,K_0,K_1,...,K_n\}$ 构成垂心组。

证明 设 O_0、O_1、...、O_n 分别为 n 维单形 $HA_1A_2...A_n$、$A_0HA_2...A_n$、$A_0A_1...A_{n-1}H$ 的外心。由定义 1 有

$$\overrightarrow{O_iK_i}=\frac{\overrightarrow{O_iH}+\sum_{l=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_l}-\overrightarrow{O_iA_i}}{k}=\frac{\overrightarrow{A_iH}+\sum_{l=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_l}}{k}，\ \overrightarrow{OK}=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{n}\overrightarrow{OA_l}。$$

因此

$$\overrightarrow{K_iK}=\overrightarrow{K_iO_i}+\overrightarrow{O_iO}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{n}\overrightarrow{OA_l}-\frac{1}{k}(\overrightarrow{A_iH}+\sum_{l=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_l})+\overrightarrow{O_iO}=\frac{n+1-k}{k}\overrightarrow{OO_i}+\frac{1}{k}\overrightarrow{HA_i},$$

将(1)代入至上式可得

$$\overrightarrow{K_iK}=\frac{n(n+1-k)-2}{nk}\cdot\overrightarrow{OO_i}\text{。}$$

当 $0\le i<j\le n$ 时，

$$\overrightarrow{K_iK_j}=\overrightarrow{K_iO_i}+\overrightarrow{O_iO_j}+\overrightarrow{O_jK_j}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{A_jH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_jA_k})-\frac{1}{k}(\overrightarrow{A_iH}+\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{O_iA_k})+\overrightarrow{O_iO_j}$$

$$=\frac{\overrightarrow{A_jA_i}+(n+1-k)\overrightarrow{O_jO_i}}{k},$$

将(2)代入至上式可得

$$\overrightarrow{K_iK_j}=\frac{n(n+1-k)-2}{nk}\cdot\overrightarrow{O_jO_i}\text{。}$$

再由定理 3 知，n 维单形 $K_0K_1K_2...K_n$ 与 n 维单形 $O_0O_1O_2...O_n$、 $A_0A_1A_2...A_n$ 相似，且 K 为 n 维单形 $K_0K_1K_2...K_n$ 的垂心。命题得证。

当 $k=n-1$ 时，由定理 4 可以推出定理 1。当 $k=n+1$ 时，由定理 4 可以推出定理 2。当 k 取无穷大时，n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的 k 号心 K 的极限即为该单形的外心 O，此时由定理 4 可以推出定理 3。

本文是文[5]在 n 维单形上的推广。

参考文献

[1] 熊曾润,曾建国.共球有限点集的 k 号心及其性质[J].数学的实践与认识,2008,(07):148-152.

[2] 马统一,邬天泉.单形的心距向量公式及其几何特征[J].数学的实践与认识,2007, 17:144-153.

[3] Gerber L.The orthocentric simplex as an extreme simplex[J].Pacific Jounal of Mathematics,1975,56:97-111.

[4] 曾建国.垂心四面体的垂心的一个向量形式——兼谈四面体的垂心与欧拉球心之间的关系[J].中学数学研究（华南师范大学）（上半月）,2009(2):27-28.

[5] 沈文选.垂心组的性质及应用[J].数学通讯,2010,(04):60-62.